

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

TC 12a

Colloquium asymptotische ontwikkelingen 1947-1950, 3d;

Sommatieformule van Euler-MacLaurin.

J.H.B.Kemperman.



1949

Sommatieformule van Euler-MacLaurin

door J. Kemperman.

Zij $f(x)$ een (reële of complexe) functie, gedefinieerd in het interval $a \leq x \leq b$, waarin $b-a = n$ een natuurlijk getal voorstelt. We nemen aan, dat $f(x)$ in dit interval $(2k+1)$ -maal continu differentieerbaar is.

Zij $P(x)$ voor elke reële waarde van x als volgt gedefinieerd

$$P_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2} \quad \text{voor } x \not\equiv 0 \pmod{1}$$

$$= 0 \quad \text{" } x \equiv 0 \pmod{1}.$$

Blijkbaar is $P_1(x)$ een periodieke functie met periode 1.

Nu geldt

$$(1) \int_a^b P_1(x-a) f'(x) dx = \sum_{v=0}^n f(a+v) - \int_a^b f(x) dx$$

waarin v de gehele waarden doorloopt. Het accentteken bij het somteken in het tweede lid duidt aan, dat de uiterste waarden $f(a)$ en $f(a+n)=f(b)$ slechts half dienen te worden geteld. We bewijzen (1) als volgt:

$$\begin{aligned} \int_a^b P_1(x-a) f'(x) dx &= \int_a^b \left\{ (x-a) - [x-a] - \frac{1}{2} \right\} f'(x) dx = \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} \int_0^1 f'(a+h+\vartheta) d\vartheta - \frac{1}{2} \int_a^b f'(x) dx = \\ &= \sum_{h=0}^{n-1} \left\{ f(a+h+1) - \int_0^1 f(a+h+\vartheta) d\vartheta \right\} - \frac{1}{2} (f(b) - f(a)) = \\ &= \sum_{h=0}^n f(a+h) - \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

We willen (1) partieel integreren en voeren daarom in ¹⁾

$$(2) \quad P_2(x) = \int_0^x P_1(\xi) d\xi + C_2$$

waarin de constante C_2 zo gekozen wordt, dat

$$(3) \quad \int_0^1 P_2(\xi) d\xi = 0$$

Hierdoor is C_2 eenduidig bepaald. Wegens $\int_0^m P_1(\xi) d\xi = 0$ voor m geheel, volgt uit (2), dat $P_2(x)$ een periodieke functie is met periode 1. Dus volgt uit (3) voor gehele waarden van m

$$\int_0^m P_2(\xi) d\xi = 0$$

en vormen we nu analoog met (2) de functie

$$P_3(x) = \int_0^x P_2(\xi) d\xi + C_3$$

¹⁾ Deze wijze om de sommatieformule af te leiden is mij aan de hand gedaan door Prof. Dr. J.G. van der Corput.

dan zal $P_3(x)$ weer een periodieke functie zijn met periode 1. C_3 kiezen we zo, dat $\int_0^1 P_3(\xi) d\xi = 0$.

Dit proces zetten we onbepaald voort. De aldus verkregen reeks functies $P_1(x), P_2(x), \dots, P_h(x), \dots$ wordt eenduidig bepaald door de volgende 3 eigenschappen:

$$1. P_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2} \quad \text{voor } x \not\equiv 0 \pmod{1} \\ = 0 \quad \text{voor } x \equiv 0 \pmod{1}$$

$$(4) 2. \int_0^1 P_h(\xi) d\xi = 0 \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(5) 3. P_{h+1}(x) = \int_0^x P_h(\xi) d\xi + C_{h+1} \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

Uit deze eigenschappen leidt men de volgende af:

4. $P_h(x)$ is een periodieke functie met periode 1.

5. Voor $h \geq 2$ is $P_h(x)$ een $(h-2)$ -maal continu differentieerbare functie. Verder is

$$P_h^{(h-2)}(x) = P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12} \quad \text{als } x = x - [x].$$

6. $P_{2h-1}(x)$ is een oneven functie } $h = 1, 2, \dots$
 $P_{2h}(x)$ is een even functie }

Wegens de periodiciteit is dit equivalent met

$$(6) P_{2h}(1-x) = P_{2h}(x) \quad \text{en} \quad P_{2h-1}(1-x) = -P_{2h-1}(x)$$

Verder is $P_{2h-1}(0) = 0$.

Alleen de laatste eigenschap behoeft nog een nader bewijs. Zij gegeven, dat $P_k(x)$ het beschreven karakter heeft. Als k oneven is, dan volgt in het bijzonder $\int_0^1 P_k(\xi) d\xi = 0$ en is dus $C_{k+1} = 0$ (vgl. formule (5)). Nu volgt (zij $\eta = -\xi$)

$$P_{k+1}(x) = \int_0^x P_k(\xi) d\xi + C_{k+1} = (-1)^k \int_0^x P_k(-\xi) d\xi + C_{k+1} = \\ = (-1)^k \int_0^{-x} P_k(\eta) d\eta + C_{k+1} = (-1)^k \{ P_{k+1}(-x) - C_{k+1} \} + C_{k+1} = (-1)^{k+1} P_{k+1}(-x)$$

en de bewering geldt ook voor $P_{k+1}(x)$. Daar $P_1(x)$ inderdaad een oneven functie is, is eigenschap 6 bewezen.

De getallen B van Bernoulli worden gedefinieerd door

$$B_0 = 1$$

$$[B_n + \binom{n}{1} B_{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} B_1 + \binom{n}{n} B_0] = 0 \quad (n=2, 3, \dots)$$

De laatste recursiformule schrijven we symbolisch volgens

$$(7) \quad (B+1)^n - B^n = 0 \quad (n = 2, 3, \dots)$$

We vinden $B = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = +\frac{1}{6}$ enz. Noem nu

$$(8) \quad \frac{(T+B)^h}{h!} = \varphi_h(x) \quad (h = 1, 2, \dots)$$

waarin $T = x - [x]$, en het rechterlid als boven symbolisch moet worden opgevat. Voor $h = 1$ en $T = 0$ gelde evenwel $\varphi_1(x) = 0$

We tonen nu aan, dat

$$(9) \quad P_h(x) \equiv \varphi_h(x) \quad (h = 1, 2, \dots)$$

We behoeven daartoe alleen bovengenoemde eigenschappen 1, 2 en 3 te verifiëren voor het functiestelsel $\varphi_h(x)$ ($h = 1, 2, 3, \dots$). Vooreerst geldt wegens $B_1 = -\frac{1}{2}$, dat

$$\varphi_1(x) = P_1(x)$$

Verder geldt wegens (7)

$$(10) \quad \int_0^1 \varphi_h(\xi) d\xi = \int_0^1 \frac{(\xi+B)^h}{h!} d\xi - \frac{(1+B)^{h+1} - B^{h+1}}{(h+1)!} = 0$$

zodat alleen nog geverifieerd behoeft te worden voor $h = 1, 2, \dots$

$$(11) \quad \varphi_{h+1}(x) = \int_0^x \varphi_h(\xi) d\xi + \text{constante.}$$

Wegens de periodiciteit der beide leden (voor het rechterlid wegens

(10) en de periodiciteit van $\varphi_h(\xi)$) mogen we aannemen, dat $0 \leq x < 1$. Dan is

$$\int_0^x \varphi_h(\xi) d\xi = \int_0^x \frac{(\xi+B)^h}{h!} d\xi = \frac{(x+B)^{h+1}}{(h+1)!} - \frac{B^{h+1}}{(h+1)!} = \varphi_{h+1} + \text{constante.}$$

Nu ook (11) bewezen is, volgt (9). Voor $h \geq 1$ geldt dus

$$0 = P_{2h+1}(0) = \varphi_{2h+1}(0) = \frac{B_{2h+1}}{(2h+1)!}, \quad P_{2h}(0) = \varphi_{2h}(0) = \frac{B_{2h}}{(2h)!}$$

dus o.a.

$$(12) \quad B_{2h+1} = 0 \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

Gebruikmakend van de geconstrueerde functies $P_h(x)$ vormen we nu met partiele integratie het linkerlid van (1) om. Wegens

$$[P_h(x-a)]_{x=a} = [P_h(x-a)]_{x=b} = P_h(0) = \frac{B_h}{h!} \quad \text{en (12) vinden we}$$

$$(13) \quad \sum_{v=1}^n f(a+v) - \int_a^b f(x) dx = \frac{B_2}{2!} [f'(b) - f'(a)] + \frac{B_4}{4!} [f'''(b) - f'''(a)] \\ + \dots + \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + R_k$$

waarin

$$(14) \quad R_K = \int_a^b P_{2K+1}(\xi) f^{(2K+1)}(\xi) d\xi$$

Dit is de beroemde sommatieformule van Euler-MacLaurin. Hiermee kunnen we sommen $S_n = \sum_{\nu=0}^n f(a+\nu)$

die voor $n \rightarrow \infty$ slecht convergeren of zelfs divergeren, veelal zeer nauwkeurig berekenen. Voor grote waarden van n levert (13) vaak een asymptotische ontwikkeling van S_n naar n .

Als $\int_a^\infty P_{2K+1}(\xi) f^{(2K+1)}(\xi) d\xi$ bestaat, schrijven we

$$(15) \quad \sum_{\nu=0}^n f(a+\nu) - \int_a^b f(x) dx = C_a + \frac{B_2}{2!} f'(b) + \dots + \frac{B_{2K}}{(2K)!} f^{(2K)}(b) + R_K$$

waarin

$$(16) \quad C_a = \int_a^\infty P_{2K+1}(\xi) d\xi - \frac{B_2}{2!} f'(a) - \dots - \frac{B_{2K}}{(2K)!} f^{(2K)}(a)$$

en

$$(17) \quad R_K = - \int_b^\infty P_{2K+1}(\xi) f^{(2K+1)}(\xi) d\xi$$

Past men op het rechterlid van (17) weer partiële integratie toe, dan vindt men

$$(18) \quad R_K = \frac{B_{2K+2}}{(2K+2)!} f^{(2K+2)}(b) + \dots + \frac{B_{2K+2p}}{(2K+2p)!} f^{(2K+2p)}(b) - \int_b^\infty P_{2K+2p+1}(\xi) f^{(2K+2p+1)}(\xi) d\xi$$

mits de omvorming geoorloofd is d.w.z. mits $f(x)$ nog $(2K+2p+1)$ maal continu differentieerbaar is voor $b \leq x < \infty$. Verder moet gelden dat

$$\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \xi^{(2K+l)} f^{(2K+l)}(\xi) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, 2p)$$

en de integralen $\int_b^\infty P_{2K+l}(\xi) f^{(2K+l)}(\xi) d\xi \quad (l = 1, 2, \dots, 2p+1)$ bestaan. zeer vaak levert (18) een asymptotische ontwikkeling van R_K naar b (waarin $b = a+n$).

Toepassing.

Voor grote waarden van N wordt gevraagd

$$S_N = \sum_{x=1}^N \sqrt{x} \log^2 x$$

Voor $f(x) = \sqrt{x} \log^2 x$ passen we nu (13) toe. We vinden

$$S_N - \frac{1}{2} \sqrt{N} \log^2 N = \int_1^N \sqrt{x} \log^2 x dx + \frac{1}{12} [f'(N) - f'(1)] + R_2$$

met

$$(19) \quad R_2 = \int_1^N P_3(x) f'''(x) dx$$

Berekening levert

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} (\log^2 x + 4 \log x)$$

$$(20) \quad f'''(x) = \frac{1}{8} x^{-5/2} (3 \log^2 x - 4 \log x - 24)$$

$$\int_1^N \sqrt{x} \log^2 x \, dx = \frac{2}{9} N \sqrt{N} \left(3 \log^2 N - 4 \log N + \frac{8}{3} \right) - \frac{16}{27}$$

waaruit volgt

$$S_N = \frac{2}{9} N \sqrt{N} \left(3 \log^2 N - 4 \log N + \frac{8}{3} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{N} \log^2 N - \frac{16}{27} + \frac{1}{24} \frac{1}{\sqrt{N}} (\log^2 N + 4 \log N) + R_2$$

waarin R_2 weer door (19) wordt gegeven. Daar de periodieke functie $P_3(x)$ beperkt is, bestaat wegens (20) de integraal:

$$y = \int_1^\infty P_3(x) f'''(x) \, dx$$

zodat we kunnen schrijven $R_2 = y - P_{1,2}^*$ met $R_2^* = \int_N^\infty P_3(x) f'''(x) \, dx$ dat we volgens (18) ontwikkelen

$$(21) \quad R_2^* = \frac{B_{4k}}{4!} f'''(N) + \dots + \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k+1)}(N) + R_{k+1}^*$$

Hierin is

$$R_{k+1}^* = \int_N^\infty P_{2k+1}(x) f^{(2k+1)}(x) \, dx$$

Voor elk reeel getal $\gamma > 0$ geldt in ons geval, dat

$$f^{(2k+1)}(x) = O\left(\frac{1}{x^{2k+\frac{1}{2}-\gamma}}\right) \text{ waaruit volgt}$$

$R_{k+1}^* = O\left(\frac{1}{N^{2k+\frac{1}{2}-\gamma}}\right)$ daar immers $P_{2k+1}(x)$ een begrensde functie is. De oneindig voortgezette ontwikkeling (21) blijkt een asymptotische ontwikkeling naar N te zijn.

Schatting van de restterm

Hiertoe hebben we een bovengrens van $|P_{2k+1}(x)|$ nodig. We gaan uit van de Fourierontwikkeling

$$(22) \quad P_1(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n\pi}$$

Daar de reeks $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\pi}$ met $z = e^{2\pi i x}$ absoluut en gelijkmatig convergeert voor $|z| \leq \rho < 1$, volgt uit het majorantenprincipe, dat (22) absoluut en gelijkmatig convergeert voor $m+\delta \leq x \leq m+1-\delta$ waar $0 < \delta < \frac{1}{2}$ en m geheel. Men mag nu (22) term voor term ¹⁾ integreren zodat

$$P_2(x) = \int_0^1 P_1(\xi) \, d\xi + C_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos 2\pi n x}{(2\pi n)^2} + C_2'$$

¹⁾ Immers $P_1(x)$ is begrensd in een δ -omgeving van de critieke punten.

De reeks in het laatste lid convergeert gelijkmatig voor $-\infty < x < +\infty$

Wegens $\int_0^1 \cos 2\pi n x = 0$ ($n=1,2,\dots$) geldt

$$\int_0^1 P_2(\xi) d\xi = C_2'$$

zodat $C_2' = 0$. Op deze wijze volgt met volledige inductie

$$(23) \quad P_{2k}(x) = (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cos 2\pi n x}{(2\pi n)^{2k}} \quad (k=1, 2, \dots)$$

$$(24) \quad P_{2k+1}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin 2\pi n x}{(2\pi n)^{2k+1}} \quad (k=1, 2, \dots)$$

Hieruit vinden we de bovengrens

$$(25) \quad |P_h(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2\pi n)^h} \quad (h=2, 3, 4, \dots)$$

Substitueren we in (23) $x = 0$, dan vinden we

$$(26) \quad P_{2k}(0) = \frac{B_{2k}}{(2k)!} = (-1)^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2\pi n)^{2k}}$$

Voor h even wordt in (25) de bovengrens van $|P_h(x)|$ dus aangenomen en is gelijk aan $|B_h/h!|$

Voor elke gehele waarde van h met $h \geq 2$ kan men wegens $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^h} < 2$ de schatting (25) verzwakken tot

$$|P_h(x)| < \frac{4}{(2\pi)^h}$$

Willen we bijvoorbeeld de in (21) voorkomende rest schatten, dan gebruiken we

$$|P_3(x)| < \frac{4}{(2\pi)^3} < \frac{4}{216} = \frac{1}{54}$$

$$|f'''(x)| < \frac{3}{8} x^{-5/2} \log^2 x$$

$$R_2^* = \int_N^{\infty} P_3(x) f'''(x) dx$$

het laatste wegens (20). Dus volgt

$$|R_2^*| < \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{54} \int_N^{\infty} \frac{\log^2 x}{x^{5/2}} dx = \frac{1}{224} \cdot \frac{1}{N^{3/2}} \left(\log^2 N + \frac{4}{3} \log N + \frac{8}{9} \right)$$

Opmerking: Als $f^{(2k)}(x)$ voor $a \leq x \leq b$ niet van teken verandert, dan is in (13) de restterm R_k in absolute waarde hoogstens gelijk aan de laatst beschouwde term. Immers

$$\begin{aligned} R_k &= \int_a^b P_{2k+1}(\xi) f^{(2k+1)}(\xi) d\xi = - \int_a^b P_{2k}(\xi) f^{(2k)}(\xi) d\xi = \\ &= -P_{2k}(\eta) \int_a^b f^{(2k)}(\xi) d\xi = -P_{2k}(\eta) (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)), \end{aligned}$$

met $a \leq \eta \leq b$ (we gebruikten de middelwaardestelling). Dus wegens (25) en (26) is

$$|R_k| \leq \left| \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a) \right) \right|$$

Andere gedaante van de restterm in (13) voor het geval, dat $f(x)$ een reguliere functie is.

Stelling 1. Zij $f(z)$ analytisch in een strook G $a \leq \operatorname{Re} z \leq b$, waarin a en b , met $a \leq b$ en $b-a = n =$ geheel, reële grootheden zijn. Neem aan dat voor x reëel en $a \leq x \leq b$ ook $f(x)$ reëel is. Zij verder gelijkmatig voor $a \leq x \leq b$

$$(27) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} f(x + i y) e^{(\eta - 2\pi i)y} = 0$$

waarin η een positief reëel getal voorstelt.

Dan geldt:

$$(28) \quad \sum_{\nu=0}^n f(a+\nu) = \int_a^b f(x) dx + \frac{B_2}{2!} [f'(b) - f'(a)] + \dots + \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)]$$

$$(29) \quad \text{waarin } R_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_a^b \frac{[f(x + i\theta y) - f(x - i\theta y)]}{e^{2\pi i y}} y^{2k} dy + R_{1k}$$

waarin $0 < \theta < 1$ als $k = 1, 2, 3, \dots$ en $\theta = 1$ als $k = 0$.

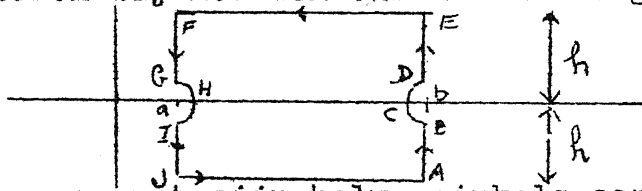
Bewijs: De functie $\varphi(z) = e^{2\pi i(z-a)}$ heeft in de punten $z = a + \nu$ met ν geheel een enkelvoudig nulpunt.

$\varphi(z)$ heeft in die punten de waarde $2\pi i$.

Zij C_n een contour binnen het gebied G , die de punten $z = a + \nu$ met $\nu = 1, 2, \dots, (n-1)$ elk eenmaal in positieve zin omloopt, dan geldt:

$$(30) \quad \sum_{\nu=1}^{n-1} f(a+\nu) = \int_{C_n} \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz$$

Voor C_n kiezen wij het contour uit de volgende figuur:



Om de punten a en b zijn halve cirkels aangebracht met straal $\varepsilon < 1$.

In een voldoende kleine omgeving van $z = a$ kunnen wij schrijven

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{f(a)}{2\pi i} + O(1)$$

en voor $\varepsilon \rightarrow 0$ is de bijdrage van de halve cirkel om $z = a$ in het rechterlid van (30)

$$(31) \quad -\frac{1}{2} f(a) + O(\varepsilon)$$

Evenzo voor de halve cirkel BCD

$$(32) \quad -\frac{1}{2} f(b) + O(\varepsilon)$$

Op JA geldt $\varphi(z) = e^{2\pi i(x-i h-a)} = O(e^{2\pi h})$

en wegens (27) gaat voor $h \rightarrow \infty$ de bijdrage van JA in het rechterlid van (30) naar nul.

Op het gedeelte DEFG van C_n schrijven we

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = \frac{\varphi(z)+1}{\varphi(z)} f(z) - f(z)$$

Nu is vooreerst

$$-\int_{DEFG} f(z) dz = + \int_{GHCD} f(z) dz = \int_a^b f(x) dx + O(\varepsilon)$$

Verder geldt op FE $\frac{\varphi(z)+1}{\varphi(z)} = \frac{e^{2\pi i(x+iy-a)}}{e^{2\pi i(x+iy-a)-1}} = O(e^{-2\pi h})$

en wegens (27) volgt $\int_{\Gamma} \frac{\varphi(z)+1}{\varphi(z)} dz \rightarrow 0$ als $h \rightarrow +\infty$

Combineren we al deze gegevens, dan vinden we

$$(33) \int \frac{f(z)}{\varphi(z)} = -\frac{1}{2} (f(a) + f(b)) + \int_a^b f(x) dx + O(\varepsilon)$$

$$+ i \int_{\varepsilon}^h \frac{\varphi(b+iy)+1}{\varphi(b+iy)} f(b+iy) dy + i \int_{\varepsilon}^h \frac{\varphi(a+iy)+1}{\varphi(a+iy)} f(a+iy) dy$$

$$+ i \int_{-\varepsilon}^{-h} \frac{f(a+iy)}{\varphi(a+iy)} dy + i \int_{-h}^{-\varepsilon} \frac{f(b+iy)}{\varphi(b+iy)} dy + R_h$$

waarbij $\lim_{h \rightarrow \infty} R_h = 0$. Laten we nu in (33) de integratiegrens h naar $+\infty$ naderen, dan zullen de resulterende oneigenlijke integralen wegens

(27) convergeren^{*)}, en we krijgen in verband met (30)

$$\sum_{v=0}^n f(a+v) = \int_a^b f(x) dx + i \int_{\varepsilon}^{\infty} \left[\frac{\varphi(x+iy)+1}{\varphi(x+iy)} f(x+iy) \right]_{x=a}^{x=b} dy + i \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \left[\frac{\varphi(x+iy)+1}{\varphi(x+iy)} f(x+iy) \right]_{x=a}^{x=b} dy + O(\varepsilon)$$

Nu geldt $\varphi(a+iy) = \varphi(b+iy) = e^{-2\pi y} - 1$ en dus volgt

$$\sum_{v=0}^n f(a+v) = \int_a^b f(x) dx + \frac{1}{2} \int_{\varepsilon}^{\infty} \left[f(x+iy) - f(x-iy) \right]_{x=a}^{x=b} \frac{dy}{e^{2\pi y} - 1} + O(\varepsilon)$$

De integrand van de laatste integraal is begrensd in een omgeving

$0 \leq y \leq \varepsilon$ en de overgang $\varepsilon \rightarrow 0$ levert dus een convergente integraal.

We vinden

$$(34) \sum_{v=0}^n f(a+v) = \int_a^b f(x) dx + R_0$$

met

$$(35) R = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left[f(x+iy) - f(x-iy) \right]_{x=a}^{x=b} \frac{dy}{e^{2\pi y} - 1}$$

waarmee stelling 1 voor $k = 0$ bewezen is. Daar voor x reeel ook $f(x)$ reeel is, zal in (35) de uitdrukking

$$\frac{1}{2} \left[f(x+iy) - f(x-iy) \right]_{x=a}^{x=b}$$

eveneens reeel zijn. Bij het afbreken van de reeks van Taylor van deze uitdrukking, mogen we dus de restterm van Lagrange gebruiken.

$$(36) 2 \left[\frac{1}{1!} f'(x)y - \frac{1}{3!} f'''(x)y^3 + \dots + \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} f^{(2k-1)}(x) y^{2k-1} \right]_{x=a}^{x=b} + \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} \left[f^{(2k)}(x+iy) - f^{(2k)}(x-iy) \right]$$

met $0 < \theta < 1$. Stel nu

$$\int_0^{\infty} y^{2p-1} \frac{1}{e^{2\pi y} - 1} dy = (-1)^{p-1} \frac{B_{2p}^*}{2^p p} \quad (p=1, 2, \dots) \quad \left[f^{(2k)}(x+iy) - f^{(2k)}(x-iy) \right]$$

Na invulling van (36) en (35) vinden we in verband met (34)

$$(37) \sum_{v=0}^n f(a+v) = \int_a^b f(x) dx + \frac{B_{2k}^*}{2^k k} \left[f^{(2k)}(b) - f^{(2k)}(a) \right] + \dots + \frac{B_{2k}^*}{(2k)!} \left[f^{(2k)}(b) - f^{(2k)}(a) \right] + R_k$$

waarbij R_k door (29) wordt gegeven.

We moeten nog aantonen dat

$$B_{2k}^* = B_{2k} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Pas daartoe (37) toe met $f(z) = z^{2k-1}$ en $a=0$, $b=n$

*) I.p.v. (27) kunnen we ook eisen dat de betreffende integrale

geren en (27) geldt voor $\eta = 0$

Daar in dit geval $R_k = 0$ vinden we

$$(38) \sum_{v=0}^n v^{2k-1} = \frac{n^{2k}}{2k} + \frac{B_2^*}{2!} (2k-1)n^{2k-2} + \dots + \frac{B_{2k}^*}{(2k)!} (2k-1)!$$

Pas nu (13) toe met $f(x) = x^{2k-1}$, dan vinden we de met (38) analoge formule

$$(39) \sum_{v=0}^n v^{2k-1} = \frac{n^{2k}}{2k} + \frac{B_2}{2!} (2k-1)n^{2k-2} + \dots + \frac{B_{2k}}{(2k)!} (2k-1)!$$

Daar (38) en (39) voor $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ gelden, volgt $B_{2k}^* = B_{2k}$ voor $k = 1, 2, \dots, k$, zodat (37) nu in (28) overgaat en stelling 1 bewezen is.

Onder de voorwaarden van stelling 1 (in het bijzonder wegens (27)) bestaat zowel voor $x = a$ als $x = b$

$$(40) \Omega_k(x) = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \int_0^\infty \frac{f^{(2k)}(x + \theta y) - f^{(2k)}(x - \theta y)}{e^{\pi y} - 1} y^{2k} dy \quad \begin{cases} 0 < \theta < 1 \\ \theta = 0 \text{ als } m = 0 \end{cases}$$

en we kunnen dus stelling 1 ook in de volgende vorm brengen:

Stelling 2 Zij $f(z)$ regulier in een gebied G waarvoor $a \leq \operatorname{Re} z \leq b$ (b en a zijn reeel met $b - a = n$ als natuurlijk getal). Neem aan, dat gelijkmatig geldt

$$(41) \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x \pm iy) e^{(\eta - \pi n)y} = 0$$

voor $a \leq x \leq b$, waarin $\eta > 0$. Dan geldt

$$(42) \sum_{v=0}^n f(a+v) = C_k + \int_a^b f(x) dx + \frac{B_2}{2!} f'(b) + \dots + \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(b) + \Omega_k(b)$$

waarin $C_k = -\frac{B_2}{2!} f'(a) - \dots - \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(a) - \Omega_k(a)$

†) Aequivalent met de bekende formule

$$\sum_{v=1}^{n-1} v^{2k-1} = \frac{(n+B)^{2k} - B^{2k}}{2k}$$

Sommatieformule van Euler-MacLaurin II

Errata

1. Op blz. 2 regel 10 v.o. staat: $\int_0^1 P_k(\xi) d\xi$ Lees: $\int_0^1 \int_0^x P_k(\xi) d\xi$

2. Zie blz. 5, formule (22). De gelijkmatige convergentie volgt in het geheel niet uit het majorantenprincipe, zoals gesuggereerd, maar blijkt bij partiele sommatie wegens

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin 2\pi kx \right| < \left| \sum_{k=1}^n e^{i2\pi kx} \right| = \left| \frac{1}{1 - e^{i2\pi x}} \right| = \left| \frac{1}{2 \sin \pi x} \right| < \frac{1}{2 \sin \pi \delta}$$

als x gelegen is in het interval $m + \delta \leq x \leq m + 1 - \delta$

(met m geheel en $0 < \delta < \frac{1}{2}$).

3. Op blz. 6, regel 9 v.o. staat " $\frac{1}{56}$ " Lees " $\frac{1}{54}$ "

Daaruit voortvloeiende correcties dienen te worden aangebracht op bl. 6, regel 6 v.o.†

Opm. 1 Analooq met de beschouwing van blz. 5 bewijzen we de volgende stelling:

Stelling. Is $f(x)$ voor $x \geq a$ oneindig vaak differentieerbaar, en is een natuurlijk getal k_0 te vinden, en een onbegrensd aangroeiende rij van reële getallen $P_k > 1$ ($k = k_0, k_0 + 1, \dots$) zodanig dat

$$(43) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x^{P_k} f^{(2k+1)}(x) = 0 \quad (k = k_0, k_0 + 1, \dots)$$

dan geldt voor grote waarden van N (waarbij N een natuurlijk getal voorstelt) de asymptotische ontwikkeling

$$\sum_{n=m}^N f(n) = \int_m^N f(x) dx + \frac{1}{2} f(N) + C + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{B_{2h}}{(2h)!} f^{(2h-1)}(N)$$

Hierin stelt C een getal voor, dat niet van N , maar wel van het (natuurlijk) getal m afhangt.

Bewijs. We passen de sommatieformule (15) toe voor $k = k_0$. Dit is toegestaan, omdat wegens $P_{k_0} > 1$ en (43), toegepast voor $k = k_0$ de volgende integraal zin heeft

$$R_{k_0} = - \int_N^{\infty} P_{2k_0+1}(x) f^{(2k_0+1)}(x) dx$$

We vinden

$$\sum_{n=m}^N f(n) = C + \int_m^N f(x) dx + \frac{1}{2} f(N) + \sum_{h=1}^{k_0} \frac{B_{2h}}{(2h)!} f^{(2h-1)}(N) + R_{k_0}$$

waarin C een van N onafhankelijk constante voorstelt. Toepassing van formule (18) levert nu voor $l > k_0$

$$R_{k_0} = \sum_{h=k_0+1}^l \frac{B_{2h}}{(2h)!} f^{(2h-1)}(N) - R_l$$

met

$$(44) \quad R_\ell = - \int_N^{\infty} P_{2\ell+1}(x) f^{(2\ell+1)}(x) dx$$

Omdat $P_{2\ell+1}(x)$ een periodieke en dus begrensde functie voorstelt, is de in (44) voorkomende integraal van lagere orde dan x^{-P_ℓ} en dus is R_ℓ van lagere orde dan N^{-P_ℓ} . Door ℓ onbegrensd te laten aangroeien, zal ook P_ℓ onbegrensd aangroeien, en vinden we de in de stelling genoemde asymptotische ontwikkeling.

Opm. 2. In stelling 1 (blz. 7) is de realiteit van $f(z)$ voor reële z alleen nodig als $k \geq 1$, (niet voor $k = 0$), omdat deze eigenschap eerst gebruikt is in formule (36) bij het bezigen van de restterm van Lagrange.

Opm. 3. In stelling 1 is het voldoende om (27) te eisen voor $\eta = 0$. Schrijf n.l. in het bewijs formule (33) in de vorm

$$\int_{C_n} \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz = -\frac{1}{2} (f(a) + f(b)) + \int_a^b f(x) dx + O(\varepsilon) + R_h + \Omega_h$$

waarin

$$\Omega_h = \frac{1}{i} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{[f(x+iy) - f(x-iy)]_{x=a}^{x=b}}{e^{2\pi y} - 1} dy$$

Voor $h \rightarrow \infty$ geldt $\lim R_h = 0$ en dus bestaat

$$(45) \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \Omega_h = \frac{1}{i} \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{[f(x+iy) - f(x-iy)]_{x=a}^{x=b}}{e^{2\pi y} - 1} dy$$

Het overige deel van het bewijs blijft verder ongewijzigd. In het bijzonder zij nog opgemerkt, dat het bestaan van de integraal (29) wegens formule (36) voortvloeit uit het bestaan van de integraal (35).

Uit het bestaan van de integraal (29) volgt evenwel nog niet de convergentie van

$$R_k(x) = \frac{(-1)^k}{(2k)! i} \int_0^{\infty} \frac{f^{(2k)}(x+iy) - f^{(2k)}(x-iy)}{e^{2\pi y} - 1} y^{2k} dy$$

voor $x=a$ of $x=b$.

Deze convergentie treedt dan en alleen dan op als

$$(46) \quad R_0(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(x+iy) - f(x-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy$$

convergeert voor $x=a$ en $x=b$ (wegens een met (36) analoge formule). In stelling 2 (op blz. 9) werd de convergentie van (46) voor $x=a$ en $x=b$ verzekerd door de conditie (27) met $\eta > 0$. Deze eis is te zwaar, doch kan niet zonder meer vervangen worden door (27) met $\eta = 0$. De

juist genoemde nodige-en-voldoende-conditie is natuurlijk verre te verkiezen.

Generalisatie van stelling 1.

Zij gegeven een functie $f(z)$ gedefinieerd voor $a \leq \operatorname{Re} z \leq b$, waarin a en b reeel met een geheel-tallig verschil. Zij $f(z)$ regulier in deze strook K op polen of vertakkingspunten na gelegen in het binnengebied van de strook 1). Zij weer gelijkmatig voor $a \leq x \leq b$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} f(x \pm iy) e^{-2\pi y} = 0$$

dan geldt

$$(47) \sum_{v=a}^b f(v) = \int_{\mathcal{L}} f(z) dz + \frac{1}{i} \int_0^{\infty} \frac{[f(x+iy) - f(x-iy)]_{x=a}^{x=b}}{e^{2\pi y} - 1} dy + C_0$$

waarin $\mathcal{L}$ een van a naar b lopende weg en waarin C_0 een nader aan te geven correctieterm voorstelt, die van b afhankelijk is. Als $f(z)$ reeel is voor reele waarden van z , dan volgt uit (47) voor $k \geq 1$

$$\sum_{v=a}^b f(v) = \int_{\mathcal{L}} f(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)] + R_k + C_0$$

met

$$R_k = \frac{(-1)^k}{(2k)! i} \int_0^{\infty} \frac{[f^{(2k)}(x+iy) - f^{(2k)}(x-iy)]_{x=a}^{x=b}}{e^{2\pi y} - 1} y^{2k} dy \quad (0 < \theta < 1)$$

en we behoeven dus alleen C_0 en $\mathcal{L}$ in (47) aan te geven.

a) Heeft $f(z)$ een aantal polen β_i binnen K 2), dan zal in het bewijs van stelling 1 formule (30) vervangen moeten worden door

$$(48) \sum_{v=a+1}^{b-1} f(v) = \int_{C_n} \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz - \sum \kappa_{\beta_i}$$

als κ_{β_i} het residu van $\frac{2\pi i f(z)}{\varphi(z)}$ voor $z = \beta_i$ voorstelt

en de sommatie geschiedt over de binnen C_n gelegen polen.

Nu $f(z)$ polen heeft in K is de formule op de tweede regel van blz. 5 (voorkomend in het bewijs van stelling 1) niet meer juist. Aannemend, dat geen polen op de reele as voorkomen vinden we nu

$$(49) - \int_{DEFG} f(z) dz = \int_a^b f(x) dx + O(\varepsilon) - \sum \kappa_{\beta}^*$$

waarin κ_{β}^* het residu van $2\pi i f(z)$ voor $z = \beta$ voorstelt en de

1) Het geval, dat een pool of vertakkingspunt op de rand ligt, behandelen analoog, doch is nu niet van belang.

2) Natuurlijk verschillend van $a, a+1, \dots, b$, daar anders het linkerlid van (47) geen zin heeft.

sommatie geschiedt over de polen β_i gelegen binnen C_n en boven de reële as. Als de in de rechterleden van (48) en (49) voorkomende sommen voor $h \rightarrow \infty$ convergeren (b.v. als in K slechts eindig vele polen van $f(z)$ gelegen zijn), dan wordt de bijdrage tot de correctieterm C_0 in (47)

$$(50) \quad - \sum r_{\beta_i} - \sum' r_{\beta_i}^*$$

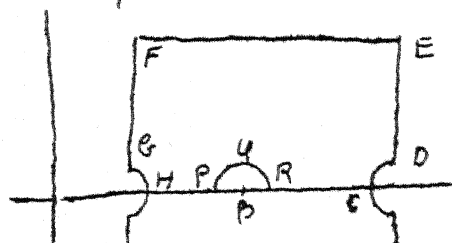
waarin r_{β_i} resp. $r_{\beta_i}^*$ de residuen voorstellen van

$$(51) \quad \frac{2\pi i f(z)}{\varphi(z)} \quad \text{resp} \quad 2\pi i \psi(z)$$

in het punt $z = \beta_i$, terwijl de sommatie geschiedt over alle in K gelegen polen, resp. alle in K en boven de reële as gelegen polen.

Wat is het effect van een pool β in K en op de reële as?

Dus $a < \beta < b$. Breng een halve cirkel om β aan met straal ε . Nu geldt (afgezien van polen binnen C_n en boven de reële as, waarvan we het effect als boven aangegeven in rekening brengen)



$$- \int_{DEFG} f(z) dz = \int_{GHPQRD} f(z) dz = \int_a^{\beta-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\beta+\varepsilon}^b f(x) dx - \frac{1}{2} r_{\beta}^* + O(\varepsilon).$$

Dus in (47) moeten we kiezen

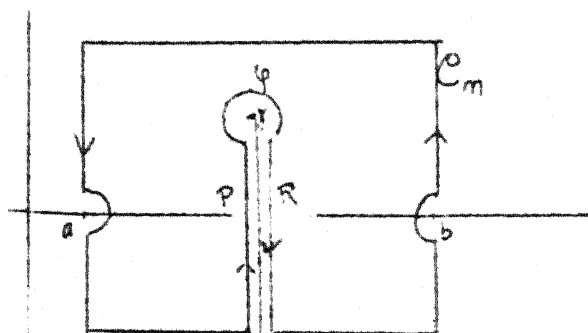
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{\beta-\varepsilon} + \int_{\beta+\varepsilon}^b \right] f(x) dx$$

terwijl in C_0 de pool β een bijdrage

$$-r_{\beta} - \frac{1}{2} r_{\beta}^*$$

geeft. Zoals reeds aangetoond geeft een pool binnen K en boven de reële as een bijdrage $-r_{\beta} - r_{\beta}^*$, en een pool binnen K en beneden de reële as een bijdrage $-r_{\beta}$ in C_0 .

b) Neem aan, dat $f(z)$ binnen K een vertakkingspunt γ heeft (we beschouwen alleen het geval van één vertakkingspunt, daar voor meer vertakkingspunten de gevolgde methode essentieel dezelfde is). Men maakt $f(z)$ eenduidig door vanaf γ loodrecht naar beneden een snede aan te brengen (als γ loodrecht boven één der punten $a, a+1, \dots, b$ ligt, dan moeten we de snede even om dat punt heenbuigen). Als contour C_n kiezen we nu de weg uit de figuur op de volgende blz. Ieder der punten $a+1, a+2, \dots, b-1$ wordt eenmaal in positieve zin doorlopen terwijl $f(z)$ regulier is binnen C_n . Het bewijs voorkomend op pag. 8 kan nu gemakkelijk worden aangepast. In (47) wordt



$$C_0 = \int_M \frac{f(z)}{\varphi(z)} dz$$

als de integratieweg M een "Schleifenintegral" langs de snede is. In

$\int_L f(x) dx$ moet L van a naar b lopen zonder de snede te
passeren. Als γ niet boven de reële as verloopt, dan schrijven we in

$$(47) \quad \int_L f(z) dz = \int_a^b f(x) dx$$

Als γ boven de reële as ligt, dan wordt L de weg $a p \gamma R b$ in de
laatste figuur.

Sommatieformule van Euler MacLaurin III

door J. Kemperman.

Stelling 4. Zij $f(w) = f(x+iy)$ voor $x \geq a$ een reguliere functie, op eindig vele singulariteiten na, die niet liggen op de rand $x = a$, noch samenvallen met een der punten $a, a+1, a+2, \dots$. Zij gelijkmatig voor elk interval $a \leq x \leq b$

$$(48) \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x \pm iy) e^{-2\pi y} = 0$$

en laat verder voor x voldoende groot en $x-a$ geheel, voldaan zijn aan

$$(49) \quad |f(x+iy) - f(x-iy)| \leq K |f(x)| \frac{e^{2\pi y} - 1}{y^{1+\eta} + 1} \quad (*)$$

waarin $0 \leq \eta < \infty$ en waarin K en η positieve constanten voorstellen.

Dan geldt:

$$(50) \quad \sum_{n=a}^{\infty} f(x) = \int_L f(w) dw + i \int_0^{\infty} \frac{f(a+iy) - f(a-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy - 2\pi i C$$

mits we aannemen, dat de oneindige som in het linkerlid convergeert. Hierin is L een van a uitgaande weg in het halfvlak $x \geq a$, die de singulariteiten van $f(w)$ vermijdt, geen dubbelpunten heeft, en vanaf een zeker punt $\xi \geq a$ op de reële as langs de reële as naar het positief oneindige loopt; C is de som van evenveel termen als de functie $f(w)$ singuliere punten bezit in het halfvlak $x \geq a$; de bijdrage tot C van een boven L gelegen singulier punt β is gelijk aan het bij β behorend residu van $f(w)$ vermenigvuldigd met $\frac{1}{1 - e^{-2\pi i(\beta-a)}}$ en

de bijdrage tot C van een beneden L gelegen singulier punt β is gelijk aan het bij β behorend residu van $f(w)$ vermenigvuldigd met

$$\frac{1}{e^{2\pi i(\beta-a)} - 1} \quad | \quad *) \quad \text{J.p.v. } K |f(x)| \text{ mag men ook lezen elke functie } \alpha(x) \text{ met } \lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$$

Bewijs

Zij $b = a + n$, waarin n een zodanig groot natuurlijk getal voorstelt, dat $b \geq \xi$ en in het halfvlak $x \geq b$ geen singulariteiten van $f(w)$ liggen. Zij L_b het deel van L , dat gelegen is tussen a en b . Toepassing van de op blz. 12 aangegeven generalisatie van stelling 1 geeft

$$(51) \quad \sum_{n=a}^b f(x) = \int_{L_b} f(w) dw - 2\pi i C + R(b)$$

waarin

$$(52) \quad R(b) = \frac{1}{i} \int_0^{\infty} \frac{[f(x+iy) - f(x-iy)]_{x=a}^{x=b}}{e^{2\pi y} - 1} dy$$

en waarin C juist de in stelling 4 uiteengezette betekenis heeft.

Wegens (49) convergeert voor elke $x \geq a$, met $x-a$ geheel, de integraal

$$\Omega(x) = \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{f(x+iy) - f(x-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy$$

terwijl bovendien geldt (voor x voldoende groot, en $x-a$ geheel)

$$(53) \quad |\Omega(x)| \leq K |f(x)| \int_0^\infty \frac{dy}{y^{1+\eta} + 1} = K' |f(x)|$$

In (51) kunnen we nu schrijven $R(b) = \Omega(b) - \Omega(a)$

en wegens (53) en de convergentie van het linkerlid in (50) volgt nu

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \Omega(b) = 0$$

($b-a$ stelt steeds een natuurlijk getal voor), en dus

$$\lim_{b \rightarrow \infty} R(b) = -\Omega(a) = i \int_0^\infty \frac{f(a+iy) - f(a-iy)}{e^{2\pi y} - 1} dy$$

De limietovergang $b \rightarrow \infty$ in (51) levert nu juist

(50) (in het bijzonder volgt het bestaan van de integraal $\int_L f(z) dz$) waarmee het gestelde bewezen is.

Hulpstelling. Zij $g(y, z)$ een functie gedefinieerd voor z behorend tot een deelverzameling van het complexe vlak, die het punt $z = \infty$ tot verdichtingspunt heeft, en voor elke reële waarde ≥ 0 van y . Neem aan, dat $g(y, z)$ naar y integreerbaar is en de integraal $\int_0^\infty g(y, z) dy$ bestaat.

Laat $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$ een onbepaald aangroeiende rij van reële getallen voorstellen en zij voor elk natuurlijk getal N

$$(54) \quad g(y, z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{A_n(y)}{z^{\lambda_n}} + r_N(y, z)$$

waarin $A_n(y)$ (met $n = 0, 1, 2, \dots$) functies voorstellen die over het interval $0 \leq y < \infty$ oneigenlijk integreerbaar zijn (analoog dus ook voor $r_N(y, z)$).

Laat verder een onbegrensd aangroeiende rij reële getallen

$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_N, \dots$ gegeven zijn, en neem aan, dat voor $N \geq N_0$

$$(55) \quad z^{\mu_N} \int_0^\infty r_N(y, z) dy$$

een begrensde functie van z is. Dan geldt de asymptotische ontwikkeling

$$(56) \quad \int_0^\infty g(y, z) dy = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{c_n}{z^{\lambda_n}} + O(z^{-\mu_N}) \quad (N \geq N_0)$$

waarin $c_n = \int_0^\infty A_n(y) dy$

Bewijs. De bewering volgt door integratie van (54), wegens 't begrensde zijn van (55).

Toepassing. Zij $h(w) = h(x + iy)$ voor $x \geq 1$ een reguliere functie met

$$(57) \quad |h(x+iy)| \leq M |h(x)| e^{\theta y}$$

waarin M een positieve constante en θ een positieve constante $< 2\pi$ voorstelt. Zij verder een positieve constante ε gegeven, zo dat voor $-\varepsilon \leq y \leq +\varepsilon$ en voor elke gehele waarde ≥ 1 van x geldt

$$(58) \quad |h'(x+iy)| \leq \bar{N} |h(x)|$$

waarin $\bar{N}$ een positief reeel getal voorstelt. Vorm nu voor $0 \leq \alpha \leq 1$ en $0 < z < \infty$

$$(59) \quad \psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) e^{-\frac{n}{z}},$$

aangenomen, dat het rechterlid convergeert.

Onder genoemde voorwaarden kunnen we $\psi(z)$ voor grote reele waarden van z asymptotisch ontwikkelen volgens

$$(60) \quad \psi(z) = \frac{1}{2} h(1) e^{-\frac{1}{z}} + \int_1^{\infty} h(x) e^{-\frac{x}{z}} dx + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{A_n}{z^n} + O(z^{-N})$$

($N=1, 2, \dots$)

met

$$A_n = \frac{(-1)^n i}{n!} \int_0^{\infty} \frac{h(1+iy)(1+iy)^{n\alpha} - h(1-iy)(1-iy)^{n\alpha}}{e^{2\pi y} - 1} dy \quad (n=0, 1, \dots)$$

Om dit te bewijzen passen we stelling 4 toe met $a = 1$ en

$$(61) \quad f(x+iy) = h(x+iy) e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^{\alpha}}$$

en laten daartoe eerst zien, dat voor deze keuze van $f(x+iy)$ aan alle voorcondities van stelling 4 is voldaan.

We merken eerst op, dat geldt voor $x \geq 0$ & $0 \leq \alpha \leq 1$, $-\infty < y < +\infty$, $z \geq 0$

$$(62) \quad \left| e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^{\alpha}} \right| \leq e^{-\frac{1}{2}x^{\alpha}} \leq 1$$

daar immers voor $x+iy = \rho e^{i\varphi}$ geldt

$$R_{\alpha}(x+iy)^{\alpha} = \rho^{\alpha} \cos \alpha \varphi \geq \rho^{\alpha} (\cos \varphi)^{\alpha} = x^{\alpha}$$

1)

Onder de speciale keuze (61) van $f(x+iy)$ krijgt voorwaarde (48) de gedaante

1) Voor $0 \leq \alpha \leq 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ geldt n.l. $\cos \alpha \varphi - \cos \varphi \geq 0$,
daar het linkerlid nul is voor $\varphi = 0$ en zijn afgeleide
 $\alpha (\sin \varphi \cos^{\alpha-1} \varphi - \sin \alpha \varphi)$ hetzelfde teken heeft als φ .

$$\lim_{y \rightarrow \infty} h(x \pm iy) e^{-\frac{1}{2}(x \pm iy)^\alpha} e^{-2\pi y} = 0$$

en wegens (57) en (62) is hiernaan inderdaad voldaan.

Om voorwaarde (49) in ons geval te verifiëren, moeten we aantonen, dat de positieve constanten K en η zo te vinden zijn, dat voor $0 \leq y < \varepsilon$ en x geheel ≥ 1

$$(64) \quad |X(x, y)| = |h(x+iy) e^{-\frac{1}{2}(x+iy)^\alpha} - h(x-iy) e^{-\frac{1}{2}(x-iy)^\alpha}| \leq K |h(x)| e^{-\frac{x^\alpha}{2}} \frac{e^{2\pi y} - 1}{y^{1+\eta} + 1}$$

Nu geldt wegens (57) en (62), dat

$$|X(x, y)| \leq 2M |h(x)| e^{-\frac{x^\alpha}{2}} e^{\theta y}$$

waarin $0 < \theta < 2\pi$. Bij een willekeurige, doch vastgekozen positieve constante η is de constante C_1 zo te bepalen, dat voor $y \geq \varepsilon$

$$e^{\theta y} \leq C_1 \frac{e^{2\pi y} - 1}{y^{1+\eta} + 1}$$

en $K > 0$ is dus zo te vinden, dat (64) geldt voor $y \geq \varepsilon$.

Verder bestaat een positieve constante C_2 zo dat voor $0 \leq y \leq \varepsilon$ geldt

$$C_2 y \leq \frac{e^{2\pi y} - 1}{y^{1+\eta} + 1}$$

en we behoeven dus alleen nog te laten zien, dat $C_3 > 0$ zo gekozen kan worden, dat voor $0 \leq y \leq \varepsilon$ en x geheel ≥ 1 , geldt

$$(65) \quad |X(x, y)| \leq C_3 |h(x)| e^{-\frac{x^\alpha}{2}} y$$

De functie $X(x, y)$ neemt voor $y = 0$ de waarde nul aan, zodat volgt

$$(66) \quad X(x, y) = \int_0^y \frac{\partial X(x, t)}{\partial t} dt$$

Hierin is

$$\frac{\partial X(x, y)}{\partial y} = i \left[h'(w) e^{-\frac{w^\alpha}{2}} - \frac{\alpha}{2} w^{\alpha-1} h(w) e^{-\frac{w^\alpha}{2}} \right]_{w=x-iy}^{w=x+iy}$$

Voor $w = x + iy$ en $x \geq 1$ geldt $|w^{\alpha-1}| \leq 1$ wegens $\alpha \leq 1$

Wegens (57), (58) en (62) is nu een constante C te vinden, zo dat voor

$0 \leq y \leq \varepsilon$ en x geheel ≥ 1 geldt $\left| \frac{\partial X(x, y)}{\partial y} \right| \leq C |h(x)| e^{-\frac{x^\alpha}{2}}$

waaruit wegens (66) nu (65) volgt. Hiermee is bij de speciale keuze (61) de voorwaarde (49) geverifieerd, en daar gegeven is dat de in (59) voorkomende reeks convergeert, is nu aan alle voorwaarden van stelling 4 voldaan.

Toepassing van deze stelling levert nu

$$(67) \quad \psi(z) = \frac{1}{2} h(1) e^{-\frac{1}{2}z} + \int_1^{\infty} h(x) e^{-\frac{x}{2}} dx + R_0$$

waarin

$$(68) \quad R_0 = i \int_0^{\infty} \frac{h(1+iy) e^{-\frac{1}{2}(1+iy)y} - h(1-iy) e^{-\frac{1}{2}(1-iy)y}}{e^{2\pi y} - 1} dy$$

(in het bijzonder volgt de convergentie van de optredende integralen) Om de aangegeven ontwikkeling (60) te bewijzen, ontwikkelen we de restterm R_0 in (67) naar $\frac{1}{z}$, en wel door eerst in de integraal, voorkomend in de formule (68) voor R_0 , de integrand naar $\frac{1}{z}$ te ontwikkelen. Hiervoor gebruiken we de reeksontwikkeling van Taylor, met restterm volgens Cauchy. Zij voor $0 \leq y < \infty$ en $u \geq 0$

$$\Lambda(u, y) = \frac{1}{e^{2\pi y} - 1} \left[h(1+iy) e^{-u(1+iy)} - h(1-iy) e^{-u(1-iy)} \right].$$

Dan is

$$(69) \quad \Lambda(u, y) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n! z^n} \left\{ \frac{h(1+iy)(1+iy)^{n\alpha} - h(1-iy)(1-iy)^{n\alpha}}{e^{2\pi y} - 1} \right\} + R_N(u, y)$$

waarin

$$(70) \quad R_N(u, y) = \frac{1}{(N-1)!} \int_0^u (u-t)^{N-1} \frac{\partial^N \Lambda(t, y)}{\partial t^N} dt$$

Hierin is

$$(71) \quad \frac{\partial^N \Lambda(u, y)}{\partial u^N} = (-1)^N \frac{h(1+iy)(1+iy)^{N\alpha} e^{-u(1+iy)} - h(1-iy)(1-iy)^{N\alpha} e^{-u(1-iy)}}{e^{2\pi y} - 1}.$$

Men bewijst nu, dat voor $0 \leq y < \infty$ en $0 \leq u < u_0 < \infty$ geldt

$$(72) \quad \left| \frac{\partial^N \Lambda(u, y)}{\partial u^N} \right| \leq C_4 e^{-\delta y}$$

waarin C_4 en γ geschikt gekozen, positieve constanten voorstellen. Voor-
eerst. geldt n.l. voor $y \geq \varepsilon$

$$\frac{1}{e^{2\pi y} - 1} \leq \frac{e^{2\pi \varepsilon}}{e^{2\pi \varepsilon} - 1} e^{-2\pi y}$$

en wegens (57) en $|e^{-u(1 \pm i\omega)^\alpha}| \leq 1$ volgt dan, dat in (71)

$$\left| \frac{\partial^N \Lambda(u, y)}{\partial u^N} \right| \leq B_1 y^{N\alpha} e^{-(2\pi - \theta)y}$$

voor zekere positieve constante B_1 , zodat (72) gelat met $0 < \gamma < 2\pi - \theta$
en geschikt gekozen positieve constante C_4 . Voor $0 \leq y \leq \varepsilon$ merkt men op,
dat de teller $T(u, y)$ in het rechterlid van (71) nul is voor $y=0$ en
dus geschreven kan worden als

$$T(u, y) = \int_0^y \frac{\partial T(u, t)}{\partial t} dt = i \int_0^y \left[e^{-u\omega^\alpha} h(\omega) \omega^{N\alpha} \left\{ \frac{h'(\omega)}{h(\omega)} + \frac{N\alpha}{\omega} - \alpha u \omega^{\alpha-1} \right\} \right]_{\omega=1-i\frac{t}{y}}^{\omega=1+i\frac{t}{y}} dt$$

De integrand in deze integraal is voor $0 \leq u < u_0 < \infty$ en $0 \leq y \leq \varepsilon$
gelijkmatig begrensd wegens $|\omega| = |1 \pm i\frac{t}{y}|$ en wegens (57) en (58). Dus
volgt $|T(u, y)| \leq B_2 y$ met $B_2 > 0$ en wegens

$$\frac{\partial^N \Lambda(u, y)}{\partial u^N} = (-1)^N \frac{T(u, y)}{e^{2\pi y} - 1}$$

volgt nu voor $0 \leq y \leq \varepsilon$ en $u < u_0$, dat

$$\left| \frac{\partial^N \Lambda(u, y)}{\partial u^N} \right| \leq \frac{B_2}{2\pi}$$

waarmee bewezen is, dat $C_4 > 0$ zo gekozen kan worden, dat voor $0 \leq u < u_0$
en elke niet-negatieve waarde van y formule (72) geldt.

Wegens (70) is dan voor $y \geq 0$ en $0 \leq u < u_0$

$$|R_N(u, y)| \leq \frac{C_2}{N!} u^N e^{-\gamma y}$$

en dus is $\int_0^\infty R_N(u, y) dy$ een convergente integraal, die voor $u \rightarrow 0$
hoogstens van de orde u^N is.

Zij $u = \frac{1}{z}$. Dan is in (67) $R_0 = i \int_0^\infty \Lambda(u, y) dy$ Substitutie
van de ontwikkeling (69) in de laatste integraal geeft

$$(73) R_0 = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n i}{n!} u^n \int_0^\infty \frac{h(1+i\omega)(1+i\omega)^{n\alpha} - h(1-i\omega)(1-i\omega)^{n\alpha}}{e^{2\pi y} - 1} dy + i \int_0^\infty R_N(u, y) dy$$

(dat de in de som optredende integralen inderdaad convergeren volgt
direct uit (57)). In verband met de juist gemaakte opmerking betreffende

$\int_0^{\infty} R_N(u,y) dy$, geeft substitutie van (73) in (67) juist de in (60) genoemde ontwikkeling met een restterm, die voor $z \rightarrow \infty$ hoogstens van de orde z^{-N} is (steeds is $u = \frac{1}{z}$ gedacht); de coëfficiënten worden juist op de op blz.17 aangegeven wijze verkregen.

N.B. Expliciet gebruik van de hulpstelling is in de laatste beschouwing blijkbaar overbodig. Wij hebben deze toch als een aparte hulpstelling geformuleerd om beter het principe te laten uitkomen, volgens welke met behulp van stelling 1 ("de complexe Euler-MacLaurin-formule"), of eigenlijk met de daaruit afgeleide stelling 4, een asymptotische ontwikkeling voor grote z kan worden bepaald voor functies van het volgende type

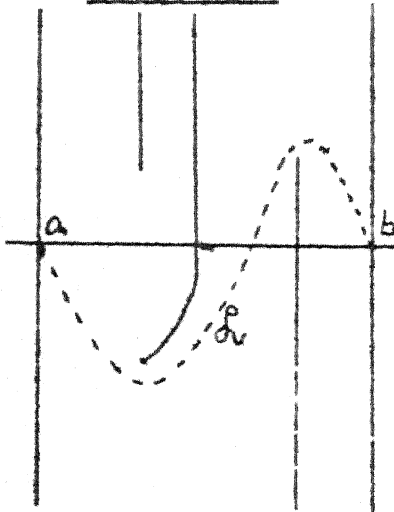
$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n,z)$$

waarin $g(w,z)$ in het halfvlak $\operatorname{Re}(w) \geq 0$ een reguliere functie van w is (op eindig veel singulariteiten na), die nog aan zekere voorwaarden moet voldoen.

Sommatieformule van Euler-MacLaurin IV

We laten nu een stelling volgen, die een samenvatting wil zijn van stelling 1 (blz.7) en zijn generalisaties, zoals die op blz. 12-14 zijn gegeven en bewezen.

Stelling 5



Zij G de strook $a \leq \operatorname{Re} z \leq b$ in het complexe z -vlak, waarin a en b reële getallen voorstellen met $b - a = N$ als natuurlijk getal. Zij G^* het enkelvoudig samenhangend gebied, dat ontstaat door G open te snijden langs eindig vele half-oneindige, op den duur rechtlijnige, elkaar niet kruisende sneden. Geen der sneden mag een randpunt van G of één der punten $a+1, a+2, \dots, b-1$ bevatten. Zij L een weg, die in G^* van a naar b loopt. Laat $f(z)$ in G^* een eenduidige, reguliere functie voorstellen, zo dat gelijkmatig voor $a \leq x \leq b$ geldt

$$(74) \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x \pm iy) e^{-2\pi y} = 0$$

Beschouw een snede, en zij C_k een lusvormige, positief omlopen weg langs de snede.

Als C_k in de richting van de positief imaginaire as naar het oneindige gaat, zij dan

$$(75) \quad I_k = \int_{C_k} \frac{f(z)}{1 - e^{-2\pi i(z-a)}} dz$$

Gaat daarentegen C_k in de richting van de negatief imaginaire as naar oneindig, dan stellen we

$$(76) \quad I_k = \int_{C_k} \frac{f(z)}{e^{2\pi i(z-a)} - 1} dz$$

We nemen dat alle integralen van de gedaante (75) of (76) convergent zijn. Dan geldt:

$$(77) \quad \sum_{n=0}^N f(a+n) = \int_{\mathcal{L}} f(z) dz + \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[f(x+iy) - f(x-iy)]_{x=a}^{x=b}}{e^{2\pi y} - 1} dy - \sum I_k$$

Het accentteken bij de som duidt aan, dat de uiterste termen $f(a)$ en $f(a+N) = f(b)$ slechts half worden meegeteld. De som $\sum I_k$ in het rechterlid van (77) bevat evenveel termen als er sneden zijn.

Als bovendien $f(z)$ reëel is voor reële waarden van z , dan geldt voor elk natuurlijk getal k

$$(78) \sum_{n=0}^N f(a+n) = \int_{\mathcal{L}} f(z) dz + \sum_{h=1}^H \frac{B_{2h}}{(2h)!} \left[f^{(2h-1)}(b) - f^{(2h-1)}(a) \right] + P_K^{(23)} + \sum I_K$$

waarin

$$(79) R_K = \frac{(-1)^K}{(2K)!} \cdot \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{\left[f^{(2K)}(x+i\theta y) - f^{(2K)}(x-i\theta y) \right]_{x=a}^{x=b}}{e^{2\pi y} - 1} y^{2K} dy$$

Hierin stelt $\theta = \theta(a, b, y)$ een reëel getal met $0 \leq \theta \leq 1$ voor.

Opm.1 Uit de gegevens van stelling 5 volgt de convergentie van de in (77) en (79) voorkomende integralen.

Opm.2 Zij $f(z)$ regulier in G op eindig vele polen β_k na, die geen van alle samenvallen met een randpunt van G of een der punten $a, a+1, \dots, b$. Laat verder aan (74) voldaan zijn. We passen stelling 5 toe voor $\mathcal{L}$ als een in G van a naar b lopende weg zonder dubbelpunten, die de polen van $f(z)$ vermijdt.

In G brengen we half-oneindige rechtlijnige sneden aan. Elk heeft een pool β_k als beginpunt en gaat vandaar verticaal naar boven of beneden, al naar gelang β_k boven of beneden $\mathcal{L}$ ligt.

Uit stelling 5 volgt nu de geldigheid van formule (77), waarin I_k gelijk is aan het bij β_k behorende residu van $f(z)$ vermenigvuldigd met $\frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i(\beta_k - a)}}$ of $\frac{2\pi i}{e^{2\pi i(\beta_k - a)} - 1}$, al naar gelang de pool β_k boven of beneden $\mathcal{L}$ ligt.

N.B. Vergelijk ook stelling 4 op blz.15.

We geven nu een toepassing van stelling 5. Zij gegeven de gehele functie

$$(80) F(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{n^\sigma} \right)$$

waarin σ een reëel getal > 1 voorstelt. Gevraagd wordt om de gedaante van de asymptotische ontwikkeling van $F(z)$ (voor grote waarden van $|z|$) te bepalen. Daartoe gaan we over op

$$(81) H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\log(n^\sigma - z) - \sigma \log n \right] \quad *)$$

Stel nu

$$(82) K(b, z) = \sum_{n=1}^{b-1} \left[\log(n^\sigma - z) - \sigma \log n \right]$$

waarin b een geheel getal ≥ 2 voorstelt. Uit de formule van Stirling volgt

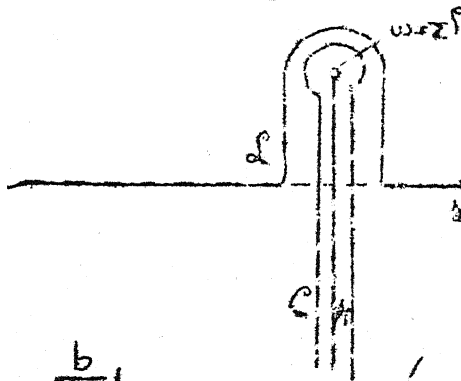
*) De nauwkeurige definitie van $\log(n^\sigma - z)$ is niet van belang daar $H(z)$ en $H_1(z) = H(z) + n \cdot 2\pi i$ aanleiding geven tot dezelfde functie $F(z)$.

$$(83) \quad \sigma \sum_{n=1}^{b-1} \log n = \sigma \log \Gamma(b) = \sigma \left[\frac{1}{2} \log 2\pi + (b - \frac{1}{2}) \log b - b + \xi(b) \right] \quad (24)$$

Hierin stelt $\xi(b)$ een reëel getal voor, dat voor $b \rightarrow +\infty$ tot nul nadert. Op de som

$$\sum_{n=1}^{\sigma} \log(\omega^{\sigma} - z)$$

passen we stelling 5 toe. Stel $f(w) = \log(\omega^{\sigma} - z)$, waarin ω^{σ} voor w reëel en positief eveneens reëel en positief wordt gedacht. Aan voorwaarde (74) van stelling 5 is voldaan; $f(w) = f(x+iy)$ heeft een vertakkingspunt voor $w^{\sigma} = z$, ofwel voor $w = z^{\frac{1}{\sigma}}$, als we invoeren $\wp = \frac{1}{\sigma}$. We maken $f(w)$ regulier in de strook $1 \leq x \leq b-1$ door een half-oneindige rechtlijnige snede K aan te brengen vanaf $w = z^{\frac{1}{\sigma}}$ verticaal naar beneden. Deze is alleen van belang als $w = z^{\frac{1}{\sigma}}$ een punt is van de beschouwde strook. Welke tak van



$w = z^{\frac{1}{\sigma}} \log(\omega^{\sigma} - z)$ we kiezen voor $f(w)$ is niet van belang.

Zij verder δ een van $w=1$ naar $w=b$ lopende weg in het complexe w -vlak, die K niet passeert en laat C de lusvormige weg voorstellen, die de snede K in positieve zin omloopt. Formule (77) van stelling 5 geeft nu

$$\sum_{n=1}^b \log(\omega^{\sigma} - z) = \int_{\delta} f(w) dw + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{[f(x+iy) - f(x-iy)]_{x=b}}{e^{2\pi i y} - 1} dy - \int_C \frac{f(w) dw}{e^{2\pi i w} - 1}$$

ofwel

$$(84) \quad \sum_{n=1}^{b-1} \log(\omega^{\sigma} - z) = \frac{1}{2} \log(1-z) - \frac{1}{2} \log(b^{\sigma} - z) + \int_{\delta} \log(\omega^{\sigma} - z) dw - \int_C \frac{\log(\omega^{\sigma} - z) dw}{e^{2\pi i w} - 1} + \Omega(b) - \Omega(1)$$

waarin

$$\Omega(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \log \frac{(x+iy)^{\sigma} - z}{(x-iy)^{\sigma} - z} \frac{dy}{e^{2\pi i y} - 1}$$

Natuurlijk vervalt in (84) de lusintegraal als $w = z^{\frac{1}{\sigma}}$ links van de lijn $\operatorname{Re} w = 1$ valt.

We behandelen nu achtereenvolgens de uitdrukkingen voorkomend in het rechterlid van (84).

1. We beschouwen vooreerst $\int_{\delta} \log(\omega^{\sigma} - z) dw$. Partiële integratie levert

$$\int \log(\omega^{\sigma} - z) dw = w \log(\omega^{\sigma} - z) - \int \frac{\sigma w dw}{\omega^{\sigma} - z} = w \log(\omega^{\sigma} - z) - \sigma z - \sigma z \int \frac{dw}{\omega^{\sigma} - z}$$

en dus geldt

$$(85) \quad \int_{\delta} \log(\omega^{\sigma} - z) dw = b \log(b^{\sigma} - z) - \log(1-z) - \sigma b + \sigma - \sigma z \int_{\delta} \frac{dw}{\omega^{\sigma} - z}$$

We zullen nu voortaan het geval uitsluiten, dat $w = z^\rho$ op de reële as ligt. Als $z = re^{i\varphi}$ en dus $z^\rho = r^\rho (\cos \rho\varphi + i \sin \rho\varphi)$ dan eisen we dus, dat $\sin \rho\varphi \neq 0$ d.w.z. $\varphi \neq 0, \pm \frac{\pi}{\rho}, \frac{2\pi}{\rho}, \dots$

Als $\sin \rho\varphi > 0$ dan ligt $w = z^\rho$ boven de reële as; als $\sin \rho\varphi < 0$ dan ligt $w = z^\rho$ beneden de reële as. Verder ligt voor $\arg z = \varphi$ en $|z| = r$ voldoende groot het punt $w = z^\rho$ rechts of links van $Rw = 1$ al naar gelang $\cos \rho\varphi > 0$ of $\cos \rho\varphi \leq 0$.

Nu is

$$\int_{\sigma} \frac{dw}{w^\rho - z} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^\rho - z} + \mathcal{E}(b) + A$$

waarin $\lim_{b \rightarrow \infty} \mathcal{E}(b) = 0$. Voor b voldoende groot is A dan en alleen dan van nul verschillend als het punt $w = z^\rho$ boven de reële as en rechts van $Rw = 1$ gelegen is, dus als $\sin \rho\varphi > 0$ en $\cos \rho\varphi > 0$.

In dat geval geldt

$$A = - \int \frac{dw}{w^\rho - z}$$

De integraal in het rechterlid heeft als integratieweg een klein in positieve zin omlopen cirkeltje om $w = z^\rho$.

Substitutie $w^\rho = s$ ($dw = \rho s^{\rho-1} ds$) geeft nu $A = -2i\rho z^{\rho-1}$.

We vatten nu de laatste twee termen in (85) samen:

$$\sigma - \sigma z \int_{\sigma} \frac{dw}{w^\rho - z} = \sigma - \sigma z \int_1^\infty \frac{dx}{x^\rho - z} + \mathcal{E}(b) + B$$

Hierin is $B = -\sigma z A$ dan en alleen dan van nul verschillend als $\cos \rho\varphi > 0$ en $\sin \rho\varphi > 0$. In dat geval is $B = +2\pi i z^\rho$. Verder geldt voor $|z| < 1$

$$\begin{aligned} h(z) = \sigma - \sigma z \int_1^\infty \frac{dx}{x^\rho - z} &= \sigma - \sigma z \int_1^\infty (x^{-\rho} + zx^{-\rho} + z^2 x^{-2\rho} + \dots) dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\rho - n} \end{aligned}$$

Hierin is $0 < \rho = \frac{1}{\sigma} < 1$. Toepassing van Theorema 1 op blz. 1 van de syllabus "The asymptotic developments of Functions defined by MacLaurinseries" volgt nu dat de functie $h(z)$, die voor $|z| < 1$ gedefinieerd wordt door de ontwikkeling $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\rho - n}$, voor $|z| > 1$ voldoet aan

$$h(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\rho + n) z^{n+1}} + \frac{\pi(-z)^\rho}{\sin \pi \rho}$$

De laatste term is juist het residu van $\frac{\pi(-z)^\rho}{(\rho - w) \sin \pi w}$ voor $w = \rho$

De laatste formule is ook juist als we het teken voor "gelijk" vervangen door het teken voor "asymptotisch gelijk", mits $\arg z \neq 0$.

Uit (85) volgt nu voor $|z| > 1$

$$(86) \int_L \log(w^\sigma - z) dw = b \log(b^\sigma - z) - \log(1-z) - \sigma b \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\rho+n)z^n} + \frac{\eta(-z)^\rho}{\sin \pi \rho} + B + \mathcal{E}(b)$$

2. We beschouwen nu de bijdrage van de lusintegraal

$$\gamma = \int_C \frac{\log(w^\sigma - z)}{e^{2\pi i w} - 1} dw$$

tot het rechterlid van (84). Wegens $d\{\log(e^{-2\pi i w} - 1)\} =$
 $= \frac{2\pi i}{e^{2\pi i w} - 1} dw$ vinden we met partiele integratie

$$\gamma = \left[\frac{1}{2\pi i} \log(w^\sigma - z) \log(e^{-2\pi i w} - 1) \right] - \frac{\sigma}{2\pi i} \int_C \frac{w^{\sigma-1} \log(e^{-2\pi i w} - 1)}{w^\sigma - z} dw$$

De "stokterm" is $\log(-1)$, als de limiet van de uitdrukking

$$\frac{1}{2\pi i} \left\{ \log(w^\sigma - z) + 2\pi i \right\} \log(e^{-2\pi i w} - 1) - \log(w^\sigma - z) \log(e^{-2\pi i w} - 1)$$

waarin we $w = z^\rho - iy$ stellen en $y \rightarrow +\infty$ laten naderen.

De integraal in het rechterlid vormen we om met de substitutie
 $w^\sigma = s, dw = \rho s^{\rho-1} ds$. We vinden

$$\gamma = \log(-1) - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\log[-1 + \exp(-2\pi i s^\rho)]}{s - z} ds$$

waarbij we voor C een klein, positief omlopen, cirkeltje om het punt $s=z$ mogen nemen. Dus

$$(87) \gamma = \log(-1) - \log[-1 + \exp(-2\pi i z^\rho)].$$

De term $-\gamma$ treedt alleen dan op in het rechterlid van (84), wanneer $w = z^\rho$ rechts van $Rw = 1$ valt voor $|z| = r$ voldoende groot, d.w.z. als $\cos \rho \varphi > 0$.

3. Bestuderen we dus verder de termen $\mathcal{E}(b)$ en $\Omega(1)$ in het rechterlid van (84). Vooreerst is het duidelijk dat

$$(88) \lim_{b \rightarrow +\infty} \Omega(b) = 0$$

Verder gelat voor $\Omega(1)$ de formule

$$(89) \Omega(1) = \frac{1}{i} \int_0^\infty \log \frac{(1+iy)^\sigma - z}{(1-iy)^\sigma - z} \frac{dy}{e^{2\pi y} - 1}$$

Formule (84) werd verkregen als een directe toepassing van stelling 5. Dus is het verboden, dat het vertakkingspunt (zij $z = r e^{i\varphi}$)

$$w = z^\rho = r^\rho (\cos \rho \varphi + i \sin \rho \varphi)$$

op de grenslijn $Rw = 1$ van de beschouwde strook valt. In dit geval

blijkt ook het rechterlid van (89) divergent te zijn. Evenwel is voor $\arg z = \varphi$ en $|z| = r$ voldoende groot $R(z) = r^{\rho} \cos \rho \varphi$ zeker van 1 verschillend. De lijnen $\arg z = \varphi$ met $\cos \rho \varphi = 0$ hebben blijkbaar een zeer bijzonder karakter, zoals trouwens reeds eerder bleek.

Door toepassing van de hulpstelling op blz. 16 blijkt, dat we een asymptotische ontwikkeling van $\Omega(1)$ verkrijgen door de integrand in (89) formeel naar $\frac{1}{z}$ te ontwikkelen en eveneens formeel te integreren. Dus

$$(90) \quad \Omega(1) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

waarin

$$a_n = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \left[(1+iy)^{n\rho} - (1-iy)^{n\rho} \right] \frac{dy}{e^{2\pi y} - 1}$$

Deze asymptotische ontwikkeling geldt in elke sector met de oorsprong als top, die geen halflijn $\arg z = \varphi$ met $\cos \rho \varphi = 0$ bevat.

Samenvattend volgt nu uit (84) voor $\cos \rho \varphi \neq 0$ en $\sin \rho \varphi \neq 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(\bar{n}-z) = \frac{1}{2} \log(1-z) - \frac{1}{2} \log(b-z) + b \log(b-z) - \log(1-z) - \sigma b$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\rho+n)z^n} + \frac{\pi(-z)^{\rho}}{\sin \pi \rho} + [2\pi i z^{\rho}] - [\log(-1) -$$

$$- \log \{-1 + \exp(-2\pi i z^{\rho})\}] - \Omega(1) + \mathcal{E}(b)$$

De termen in het rechterlid tussen gestippelde haken zijn facultatief. De eerste treedt alleen op als tegelijkertijd geldt $\cos \rho \varphi > 0$ en $\sin \rho \varphi > 0$. De tweede alleen als $\cos \rho \varphi > 0$. De term $\mathcal{E}(b)$ nadert tot nul als $b \rightarrow +\infty$. Wegens (82) en (83) geldt nu

$$K(b, z) = -\frac{1}{2}\sigma \log 2\pi - \frac{1}{2} \log(1-z) + (b-\frac{1}{2}) \left[\log(b-z) - \sigma \log b \right]$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\rho+n)z^n} + \frac{\pi(-z)^{\rho}}{\sin \pi \rho} + [2\pi i z^{\rho}] - [\log(-1) - \log \{-1 + \exp(-2\pi i z^{\rho})\}]$$

$$- \Omega(1) + \mathcal{E}(b).$$

Limietovergang $b \rightarrow \infty$ leert wegens $\sigma > 1$, dat voor $\sin 2\rho \varphi \neq 0$

$$H(z) = -\frac{1}{2}\sigma \log 2\pi - \frac{1}{2} \log(1-z) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\rho+n)z^n} + \frac{\pi(-z)^{\rho}}{\sin \pi \rho} + [2\pi i z^{\rho}]$$

$$- [\log(-1) - \log \{-1 + \exp(-2\pi i z^{\rho})\}] - \Omega(1)$$

In verband met (90) en de opmerking vòer formule (86) volgt tenslotte

$$(z \text{ zij } z = r_1 e^{i\varphi})$$

$$F(z) \sim \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{\sigma} \sqrt{1-z}} \exp \left(\frac{\pi(-z)^{\rho}}{\sin \pi \rho} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \quad \text{als } \cos \rho \varphi < 0 ;$$

$$F(z) \sim \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{\sigma} \sqrt{1-z}} \exp \left(\frac{\pi(-z)^{\rho}}{\sin \pi \rho} \right) \cdot [\exp(2\pi i z^{\rho}) - 1] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

$$\quad \text{als } \cos \rho \varphi > 0 \text{ en } \sin \rho \varphi > 0.$$

$$F(z) \sim \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{\sigma} \sqrt{1-z}} \exp \left(\frac{\pi(-z)^{\rho}}{\sin \pi \rho} \right) [1 - \exp(-2\pi i z^{\rho})] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$$

$$\quad \text{als } \cos \rho \varphi > 0 \text{ en } \sin \rho \varphi < 0.$$